VALIDATION EMPIRIQUE D'UN MODELE D'EVALUATION D'OBLIGATIONS CONVERTIBLES

JEAN-CLAUDE AUGROS
ET NICOLAS LEBOISNE
UNIVERSITE DE LYON I
INSTITUT DE SCIENCE FINANCIERE ET D'ASSURANCES
43, BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918
69622 VILLEURBANNE - FRANCE
TELEPHONE : 72-43-11-75
FAX : 72-43-11-76

Résumé

Cet article a pour objet de tester un modèle d'évaluation d'obligations convertibles consistant à exprimer la valeur de ces titres en termes d'options sur la valeur de marché de la firme émettrice. Dans une première section, les auteurs rappellent le principe du modèle. Ils montrent, dans une deuxième section, qu'il conduit à des résultats numériques très voisins de ceux fournis par la résolution numérique de l'équation aux dérivées partielles de BLACK et SCHOLES. Dans une troisième section, le modèle est ensuite testé sur un échantillon d'environ 5 000 observations portant sur 10 obligations convertibles françaises pendant les années 1992 et 1993. Enfin, dans une dernière section, les auteurs concluent sur les faiblesses du modèle et sur ses développements ultérieurs possibles.

Mots-clé

Obligations convertibles.

VALIDATION EMPIRIQUE D'UN MODELE D'EVALUATION D'OBLIGATIONS CONVERTIBLES

JEAN-CLAUDE AUGROS
ET NICOLAS LEBOISNE
UNIVERSITE DE LYON I
INSTITUT DE SCIENCE FINANCIERE ET D'ASSURANCES
43, BOULEVARD DU 11 NOVEMBRE 1918
69622 VILLEURBANNE - FRANCE
TELEPHONE : 72-43-11-75
FAX : 72-43-11-76

Abstract

The aim of this paper is to test a convertible bonds valuation model which formulates the value of those bonds in terms of options on the market value of the issuing firm. Firstly the authors present the model principle. Secondly they show that the results of the model are very close to these given by the numerical solution of BLACK's and SCHOLES equation. Thirdly the model is tested on a sample of about 5 000 market prices of 10 french convertible bonds in the course of 1992 and 1993. As a conclusion the authors appreciate the weaknesses of the model and present further developments.

Keywords

Convertible bonds.

La validation empirique des méthodes modernes d'évaluation des obligations convertibles n'a fait l'objet, jusqu'alors, que de très rares publications. En 1991, J.F. BOULIER et F. JAMET, s'inspirant de l'étude de J.F. BOULIER et J. CARRÉ (1989), ont publié les résultats d'une étude réalisée sur le marché français. Le modèle testé par ces auteurs est présenté dans J.C. AUGROS (1987) ; il consiste à décomposer la valeur d'une convertible en deux éléments qui sont évalués séparément : le premier, la valeur nue de l'obligation ou plancher actuariel, représentant la valeur obligataire du titre, est évalué de manière classique par actualisation des coupons et du prix de remboursement tandis que la seconde composante du titre, son droit de conversion, représentant la partie optionnelle de l'obligation est évaluée à l'aide d'un algorithme numérique. L'étude de BOULIER et al., réalisée sur 4 titres, au cours d'une période de 6 ans, conclut à une surévaluation des obligations convertibles par le modèle, l'écart dépassant le plus souvent 15 % de la valeur des titres. Le principal défaut de cette première approche est de ne pas prendre en compte le phénomène de dilution qui accompagne la conversion des obligations en actions. En effet, si le droit de conversion représente bien une option permettant à son titulaire d'acquérir à tout moment une action en échange de ses droits liés à son statut d'obligataire, son exercice a pour effet, contrairement à celui d'un CALL négociable sur un marché organisé, d'augmenter les capitaux propres de la firme émettrice et le nombre d'actions en circulation. Assimiler le droit de conversion d'une obligation convertible à une option négociable sur les actions de l'émetteur conduit ainsi à une surestimation du titre.

Il est plus rigoureux, comme l'ont fait INGERSOLL (1977) et BRENNAN et SCHWARTZ (1977), dans des articles déjà anciens mais qui sont toujours des références, d'évaluer en bloc la valeur d'une convertible sans chercher à la décomposer. Ainsi la variable d'état choisie n'est plus la valeur de l'action, comme dans les études précédentes, mais la valeur de marché du pseudo-bilan de l'émetteur représentée par la valeur de l'ensemble des titres, actions et convertibles, émis par la firme. En revanche, cette approche, sans doute plus difficile à tester, n'a, semble-t-il, pas encore fait l'objet d'une validation empirique.

Dans cet article, nous envisageons précisément de tester sur le marché français un modèle d'évaluation de convertibles dont l'inspiration est proche de celle des modèles de BRENNAN et SCHWARTZ et d'INGERSOLL. Dans une première section, nous rappelons le principe du modèle testé. Nous montrons dans une deuxième section qu'il conduit à des résultats très voisins de ceux fournis par l'algorithme numérique de BRENNAN et SCHWARTZ. Dans une troisième section, le modèle est testé sur un échantillon d'environ 5 000 observations portant sur 10 obligations convertibles françaises pendant les années 1992 et 1993. Enfin la dernière section permet de conclure sur les faiblesses du modèle et sur ses développements ultérieurs possibles.

I. DESCRIPTION DU MODELE D'EVALUATION

Le principe de l'évaluation d'une convertible est présenté d'abord en l'absence de dividende et de coupon, puis en présence de distributions aux actionnaires et aux obligataires. Enfin, l'existence de clauses de remboursement anticipé est examinée en dernier lieu.

1. Evaluation en l'absence de dividende et de coupon

On envisage le cas d'une firme qui est financée par N actions et m convertibles. Soit V la valeur totale de la firme telle que $V=NS+mQ$ où S et Q désignent respectivement le cours des actions et celui des convertibles. On considère que V suit un processus brownien géométrique caractérisé par un coefficient de diffusion, σ_V, constant au cours du temps.

On admet la proposition I de MODIGLIANI et MILLER (1958) selon laquelle la valeur totale de la firme est indépendante de son niveau d'endettement.

On suppose que le taux d'intérêt à court terme n'évolue pas, au cours du temps, de manière stochastique : soit r ce taux exprimé en taux annuel continu. On postule que chaque obligation convertible peut être convertie en ω actions et ce, à chaque instant, pendant toute la durée, τ, des obligations. ω, la base de conversion des titres, est stipulée constante au cours du temps. Si elles ne sont pas converties à l'échéance, les obligations sont alors remboursées par l'émetteur, au prix K par obligation, à moins que celui-ci ne soit défaillant. Dans ce dernier cas, les obligataires ont, par rapport aux actionnaires, un droit de priorité sur les actifs de la firme.

On admet que les obligations sont détenues par un grand nombre d'investisseurs (régime de concurrence) plutôt que par un seul (régime de monopole). Il est clair que, dans un régime de monopole, en l'absence de dividende et en supposant, en outre, que les obligations sont convertibles en bloc, il n'est pas optimal de convertir les obligations avant leur échéance limite, c'est-à-dire avant l'issue de la période de trois mois qui suit la date de remboursement (pour simplifier l'analyse, on admettra, par la suite, qu'il n'y a pas de délai de conversion à l'échéance des titres). En revanche, EMANUEL (1983) et CONSTANTINIDES et ROSENTHAL (1984) ont montré que, dans un régime de monopole et si les obligations ne sont pas convertibles en bloc, il pouvait être préférable pour l'investisseur de convertir ses titres de manière séquentielle pendant toute la durée de vie de l'emprunt. Toutefois, ces auteurs devaient également démontrer qu'en régime de concurrence la valeur d'équilibre des obligations est identique à celle qui prévaudrait dans un régime de monopole où les obligations seraient convertibles en bloc. Partant, nous pouvons admettre qu'en régime de concurrence la politique optimale de conversion consiste à ne pas convertir une obligation convertible avant son échéance limite.

En t^*, date d'échéance des obligations, trois situations sont envisageables (**tableau n° 1**).

Tableau n° 1

Financement par actions et obligations convertibles ordinaires

(en l'absence de coupon et de dividende)

	en t_0	Valeur à l'échéance (t^*)			*Expression en* t_0 en termes d'options
		I $V^* < mk$	II $mK < V^* < \frac{K(N+m\omega)}{\omega}$	III $\frac{K(N+m\omega)}{\omega} < V^*$	
Actions	NS	0	$V^* - mk$	$\frac{N}{N+m\omega}V^*$	$C(V,\tau,mK) - \frac{m\omega}{N+m\omega}C\left[V,\tau,\frac{K(N+m\omega)}{\omega}\right]$
Obligations convertibles	mQ	V^*	mk	$\frac{m\omega}{N+m\omega}V^*$	$V - C(V,\tau,mK) + \frac{m\omega}{N+m\omega}C\left[V,\tau,\frac{K(N+m\omega)}{\omega}\right]$

• Les titulaires des obligations convertibles choisissent de convertir leurs titres, la valeur des actions obtenues par conversion dépassant leur valeur de remboursement ; soit lorsque $\omega S^* > K$. La valeur des actions, au moment de la conversion et aussitôt après, étant égale à $V^*/(N+m\omega)$, la condition de conversion des obligations s'écrit (*colonne III*) : $V^* > \dfrac{K(N+m\omega)}{\omega}$.

• Dès lors que la condition précédente n'est pas satisfaite, les souscripteurs de l'emprunt demandent le remboursement de leurs titres. Ceux-ci ne sont remboursés intégralement que si la valeur des actifs de la firme est supérieure à la valeur, mK, de remboursement des titres (*colonne II*).

• Les obligations ne sont que partiellement remboursées, la valeur totale des actifs ne couvrant pas complètement celle de remboursement des obligations; soit lorsque $V^* < mK$. Il y a défaillance de l'émetteur et les actions de la société sont alors sans valeur (*colonne I*).

Le **tableau n° 1** résume les différentes valeurs possibles des actions et des obligations à l'échéance de l'emprunt. Il ressort que la valeur des obligations et des actions à la date présente, t_0, est équivalente à celle d'un portefeuille d'options. Il vient ainsi pour les actions :

$$NS = C(V,\tau,mK) - \frac{m\omega}{N+m\omega} C\left[V,\tau,\frac{K(N+m\omega)}{\omega}\right]$$

et pour les obligations :

$$mQ = V - C(V,\tau,mK) + \frac{m\omega}{N+m\omega} C\left[V,\tau,\frac{K(N+m\omega)}{\omega}\right]$$

où $C(V,\tau,mK)$ désigne un CALL européen sur les actifs V de la firme, de durée de vie τ et de prix d'exercice mK.

Et où $C[V,\tau,K(N+m\omega)/\omega]$ désigne un autre CALL européen sur les actifs de la firme et de durée τ, mais de prix d'exercice égal à $K(N+m\omega)/\omega$.

La valeur des obligations convertibles étant exprimée en termes d'options, il est facile de calculer cette valeur à l'aide d'un modèle d'évaluation d'options tel que par exemple le modèle de BLACK et SCHOLES.

2. Evaluation en présence de dividendes et de coupons

En présence de dividendes et de coupons, la décision de convertir des obligations convertibles avant leur échéance limite ne peut intervenir que si l'investisseur est persuadé que les dividendes rapportés par l'action seront supérieurs, de façon durable, aux coupons rapportés par l'obligation convertible elle-même. Or les prévisions de dividendes demeurent aléatoires et peuvent toujours être remises en cause. On peut donc admettre, en première analyse, que l'intérêt de l'investisseur est de profiter au maximum du délai de réflexion qui lui est offert et de reporter sa décision de conversion à l'échéance des obligations.

Si, toutefois, on admet l'hypothèse selon laquelle le montant des dividendes futurs est connu avec certitude, il peut théoriquement être profitable, dans certaines circonstances, de convertir une obligation convertible en fin d'exercice, c'est-à-dire juste avant que les actions obtenues par conversion perdent leur droit au prochain dividende(1). Il semble en effet optimal de convertir le titre en fin d'exercice si, à ce moment-là, sa valeur de conversion est supérieure à la somme du coupon(2) et de la valeur de l'obligation convertible telle qu'elle doit ressortir au début de l'exercice suivant.

---

(1) Les actions nouvelles obtenues par conversion d'une obligation convertible donnent droit aux dividendes versés au titre de l'exercice comptable au cours duquel la conversion des obligations a été demandée. Elles ne sont donc assimilables aux actions anciennes que dans la mesure où elles sont "pleine jouissance" et donnent droit, par conséquent, au prochain dividende. Dans le cas contraire, elles ne sont assimilables aux actions anciennes qu'après le détachement du prochain dividende annuel.

(2) En France, le coupon annuel est détaché le premier jour de l'exercice, en principe le 1er Janvier.

Cependant, ce raisonnement théorique perd de sa crédibilité lorsque l'on considère les conditions pratiques effectives de la conversion. En effet, les actions obtenues par conversion d'une obligation convertible n'ont une existence matérielle que plusieurs mois après la date de la demande de conversion. Jusque là, si elles peuvent, certes, être vendues à terme, elles ne peuvent, en revanche, être cédées au comptant. A cause de ces difficultés matérielles, les conversions en fin d'exercice ne sont guère pratiquées si ce n'est tout à fait en fin de vie de l'emprunt. En définitive, on peut donc admettre que, dans la pratique, la politique optimale de conversion d'une obligation convertible consiste à ne convertir le titre qu'au moment de son échéance.

Dorénavant nous admettons que le montant des dividendes futurs est prédéterminé. A la différence de BRENNAN et SCHWARTZ qui supposent que les paiements des coupons et des dividendes sont effectués par prélèvement sur les actifs risqués, V, de l'entreprise, nous admettons que ces distributions sont réalisées à partir d'une réserve de trésorerie placée au taux sans risque. Soit T la valeur de cette réserve de trésorerie telle que $T = D + I$, où D désigne la valeur actuelle cumulée des dividendes qui seront détachés pendant la durée de vie restante des obligations et I la valeur actuelle cumulée des coupons qui seront versés aux obligataires pendant la même période.

On désigne alors par $\hat{V}$ la valeur des actifs risqués détenus par la firme telle que $V = NS + mQ = \hat{V} + T$. On suppose que $\hat{V}$ suit un mouvement brownien géométrique caractérisé par un écart type, $\sigma_{\hat{V}}$,constant au cours du temps[(3)].

[(3)] La volatilité de V étant observable, on déduit facilement celle de $\hat{V}$ à l'aide de la formule suivante : $\sigma_{\hat{V}} = \sigma_V \frac{V}{\hat{V}}$.

Dès lors, il est possible d'exprimer la valeur des actions et des obligations en termes d'options sur les actifs risqués, $\hat{V}$, de la firme plutôt qu'en termes d'options sur la valeur totale de la firme. Il vient :

$$NS = C(\hat{V}, \tau, mK) - \frac{m\omega}{N + m\omega} C\left[\hat{V}, \tau, \frac{K(N + m\omega)}{\omega}\right] + D$$

et

$$mQ = \hat{V} - C(\hat{V}, \tau, mK) + \frac{m\omega}{N + m\omega} C\left[\hat{V}, \tau, \frac{K(N + m\omega)}{\omega}\right] + I\ .$$

Dans ces conditions, le processus d'évaluation des obligations convertibles n'est guère modifié par la présence de dividendes et de coupons.

Grâce au lemme d'ITO, il est possible de déduire l'expression de la volatilité, σ_S, des actions et de celle, σ_Q, des convertibles. Il vient :

$$\sigma_S = \frac{\hat{V}\sigma_{\hat{V}}}{NS}\left(\Delta_1 - \frac{m\omega}{N + m\omega}\Delta_2\right)$$

$$\sigma_Q = \frac{\hat{V}\sigma_{\hat{V}}}{mQ}\left(1 - \Delta_1 + \frac{m\omega}{N + m\omega}\Delta_2\right)$$

où Δ_1 et Δ_2 désignent respectivement le coefficient delta des options $C(\hat{V}, \tau, mK)$ et $C\left[\hat{V}, \tau, \frac{K(N + m\omega)}{\omega}\right]$. La volatilité des actions, comme celle des obligations, fluctue donc de manière aléatoire pendant toute la durée de vie des convertibles.

Il est possible également de calculer la valeur nue des obligations convertibles. Celle-ci représente la valeur des obligations ordinaires, de mêmes caractéristiques, mais sans droit de conversion, que l'émetteur aurait pu émettre à la place des obligations convertibles. Soit B, la valeur nue des obligations convertibles ou, en d'autres termes, la valeur des obligations ordinaires fictives, équivalentes aux obligations convertibles. Comme les convertibles, ces obligations fictives seraient remboursables à l'échéance au prix K et rapporteraient les mêmes coupons. Si la firme avait émis ces obligations ordinaires, la valeur totale des actifs de la firme serait moindre et égale seulement à V'avec $V' = NS + mB = \hat{V}' + T$, $mB<mQ$ et $\hat{V}' < \hat{V}$. La valeur, B, de ces obligations devrait être choisie de telle sorte que la valeur des actions, S, demeure inchangée après leur émission, toutes choses restant égales par ailleurs. Si l'émetteur avait émis ces m obligations ordinaires, la valeur des actions serait égale à $C(\hat{V}',\tau,mK) + D$. La valeur nue des obligations est donc donnée par la différence suivante :

$$mB = \hat{V}' - C(\hat{V}',\tau,mK) + I.$$

Un calcul itératif permet d'obtenir facilement cette valeur.

3. Evaluation en présence d'une clause de remboursement anticipé

Jusqu'à présent, nous avons supposé l'absence de clause de remboursement anticipé au gré de l'émetteur (CALL option) ou au gré des souscripteurs (PUT option). Or l'existence de telles clauses dans les contrats d'émission est de plus en plus fréquente.

La plupart des nouvelles émissions prévoient notamment une clause de remboursement anticipé au gré de l'émetteur, sous réserve que la valeur de conversion des obligations soit supérieure à un seuil préalablement fixé. Dans ce cas, le remboursement anticipé peut s'interpréter comme une conversion forcée pour laquelle la valeur de conversion minimum requise est celle indiquée dans le contrat d'émission.

Ayant admis la proposition I de MODIGLIANI et MILLER (1958), selon laquelle la valeur totale d'une entreprise est indépendante de sa politique d'endettement, minimiser la valeur des obligations convertibles équivaut à maximiser celle des actions. Ainsi la stratégie optimale des actionnaires - ou des dirigeants qui agissent en leur nom - consiste à amortir un emprunt convertible dès que la valeur de conversion des obligations devient supérieure à la valeur de conversion minimum autorisant le remboursement anticipé, sans quoi l'objectif de maximisation de la valeur des actions ne serait pas atteint. Une clause de remboursement anticipé au gré de l'émetteur a donc pour effet d'introduire un prix plafond dans le processus d'évaluation des obligations, ce prix plafond étant égal à la valeur de conversion minimum autorisant l'amortissement anticipé.

Certaines émissions peuvent également prévoir une clause de remboursement anticipé au gré du porteur. Une telle clause a, cette fois-ci, pour effet de fixer, à la date prévue pour son exercice, un prix plancher en dessous duquel la valeur d'une obligation ne peut descendre, ce prix plancher étant égal au prix de remboursement anticipé fixé dans le contrat d'émission.

L'introduction d'une clause de remboursement anticipé au gré de l'émetteur ou au gré des souscripteurs empêche l'utilisation du modèle de BLACK et SCHOLES pour évaluer une convertible, la durée de vie des obligations n'étant plus certaine. En revanche, l'évaluation est toujours possible en substituant au modèle de BLACK et SCHOLES un modèle discret comme, par exemple, celui de COX, ROSS et RUBINSTEIN (1979). Dans ce cas, la valeur des obligations convertibles suit un processus binomial, avec une limite à la hausse, en présence d'une clause de remboursement au gré de l'émetteur, ou une limite à la baisse, en présence d'une clause au gré du souscripteur. Il suffit donc, à chaque étape du processus, de déclencher l'exercice de ces clauses chaque fois que les prix plafond ou plancher sont dépassés.

La mise en oeuvre du modèle a fait l'objet de la réalisation d'un logiciel dénommé PRICING[4]. Le principe de constitution d'une réserve de trésorerie, sur lequel repose ce logiciel, présente l'avantage d'offrir la possibilité d'évaluer des titres plus complexes que des obligations

---

[4] Le logiciel PRICING a été réalisé, sous la responsabilité de J.C. AUGROS, au sein du Département des Émissions d'Actions de la Banque Indosuez.

convertibles ordinaires. Suivant la démarche décrite dans AUGROS (1991), PRICING permet notamment d'évaluer des obligations convertibles assorties de bons de souscription d'actions ordinaires ou remboursables. L'introduction dans le modèle d'une réserve de trésorerie a toutefois pour inconvénient de rendre la volatilité, σ_V, de la firme légèrement croissante pendant la durée de vie des obligations. En effet comme $\sigma_V = \frac{\hat{V}}{V}\sigma_{\hat{V}} = \frac{V-T}{V}\sigma_{\hat{V}}$ et que $\sigma_{\hat{V}}$ est constant par définition, σ_V a tendance à augmenter au fur et à mesure que la réserve de trésorerie diminue. La section suivante a pour objectif de montrer que PRICING conduit cependant à des résultats très peu différents de ceux obtenus, par un algorithme numérique, en l'absence d'une réserve de trésorerie.

II. COMPARAISON DES METHODES AVEC ET SANS RESERVE DE TRESORERIE

Les évaluations réalisées à l'aide du logiciel PRICING sont comparées à celles fournies par la résolution, par la méthode des différences finies, de l'équation aux dérivées partielles régissant la valeur d'une obligation convertible (cf. annexe pour le rappel de la méthode).

Deux types d'évaluation sont faites à l'aide de PRICING :

- la première est obtenue en introduisant dans PRICING la volatilité réelle de V supposée correspondre à sa volatilité historique observée ;
- la seconde est réalisée en substituant à la volatilité réelle de V une pseudo-volatilité définie de telle sorte que sa valeur moyenne obtenue pendant la durée de vie des obligations(5) égalise approximativement la volatilité historique de V réellement observée. En effet, au fur et à mesure de l'écoulement du temps, la réserve de trésorerie diminue et l'écart type du

(5) Quand la volatilité est une fonction connue du temps, la formule de Black et Scholes reste valide lorsque la variance du rendement du sous-jacent est remplacée par sa valeur moyenne.

rendement de V augmente avec une tendance linéaire. Sa variance augmente, quant à elle, avec une tendance quadratique. On détermine donc la pseudo-volatilité, σ_{VP}, de V à l'aide de la formule suivante :

$$\sigma_{VP} = \sqrt{\frac{\sigma_{VH^2}}{\frac{V}{\hat{V}} + \frac{1}{3}\left(\frac{V}{\hat{V}} - 1\right)^2}} \quad \text{avec } \sigma_{VP} < \sigma_{VH}$$

où σ_{VH} désigne la volatilité historique de V[6].

Le **tableau 2 (a,b,c,d)** permet de comparer les résultats obtenus à partir des 3 méthodes pour différentes valeurs de la firme. A chaque valeur de V correspond une valeur de la prime de conversion des obligations,

---

(6) σ_V varie de manière quasiment linéaire de $\sigma_V(t_0)$ en t_0 à $\sigma_V(t^*)$ en t^*

avec : $\sigma_V(t^*) = \sigma_{\hat{V}}(t_0) = \sigma_V(t_0)\dfrac{V(t_0)}{\hat{V}(t_0)}$.

Pour tout $t \in [t_0, t^*]$ on a donc :

$\sigma_V(t) \cong \alpha + \beta \times (t - t_0)$

avec $\alpha = \sigma_V(t_0)$ et $\beta = \dfrac{1}{t^* - t_0}\sigma_V(t_0)\left[\dfrac{V(t_0)}{\hat{V}(t_0)} - 1\right]$.

Après intégration, la valeur moyenne, $\overline{\sigma}_V^2$, de σ_V^2, entre t_0 et t^*, s'écrit :

$$\overline{\sigma}_V^2 = \alpha^2 + \alpha\beta(t^* - t_0) + \beta^2\frac{(t^* - t_0)^2}{3}.$$

Pour que $\overline{\sigma}_V^2 = \sigma_{VH}^2$ il faut donner à $\sigma_V(t_0)$ une pseudo-valeur, désignée par σ_{VP}, qui après simplification s'écrit :

$$\sigma_{VP} = \sqrt{\frac{\sigma_{VH}^2}{\frac{V(t_0)}{\hat{V}(t_0)} + \frac{1}{3}\left(\frac{V(t_0)}{\hat{V}(t_0)} - 1\right)^2}}.$$

Tableau n° 2

(a) m = 200 ; τ = 5 ans

V	Q par EDP (a)	Prime de conversion en %	Q par Pricing (b)	$\frac{b-a}{a}$ en %	Q par Pricing avec pseudo volatilité (c)	$\frac{c-a}{a}$ en %
20 000	65,15	872	64,06	-1,67	66,58	2,20
40 000	78,06	220	78,42	0,46	78,88	1,05
60 000	85,65	100	86,48	0,97	85,90	0,30
80 000	94,48	55	95,37	0,95	94,32	-0,16
100 000	104,87	33	105,74	0,83	104,60	-0,26
120 000	116,88	21	117,34	0,39	116,17	-0,61
140 000	129,40	13	129,86	0,35	128,79	-0,47
160 000	142,64	8	143,04	0,28	142,05	-0,41
180 000	156,38	5	156,70	0,20	155,85	-0,34

(b) m = 200 ; τ = 5 ans ; call option avec seuil pour S = 130

V	Q par EDP (a)	Prime de conversion en %	Q par Pricing (b)	$\frac{b-a}{a}$ en %	Q par Pricing avec pseudo volatilité (c)	$\frac{c-a}{a}$ en %
20 000	65,15	834	64,04	-1,69	66,59	2,20
40 000	77,75	218	77,88	0,17	78,55	1,02
60 000	84,47	96	84,88	0,48	84,56	0,11
80 000	91,78	49	91,97	0,21	91,55	-0,25
100 000	100,51	26	100,43	-0,07	99,64	-0,86
120 000	110,41	13	109,63	-0,70	109,20	-1,10
140 000	121,88	5	120,99	-0,73	120,49	-1,14
160 000	133,33	0	133,33	0	133,33	0
180 000	150	0	150	0	150	0

Tableau n° 2 (suite)

(c) $m = 200$; $\tau = 3$ ans

V	Q par EDP (a)	Prime de conversion en %	Q par Pricing (b)	$\frac{b-a}{a}$ en %	Q par Pricing avec pseudo volatilité (c)	$\frac{c-a}{a}$ en %
20 000	73,18	1 265	72,67	-0,70	74,03	1,16
40 000	85,14	270	85,27	0,15	85,53	0,46
60 000	89,29	114	89,61	0,36	89,28	-0,01
80 000	95,28	56	95,71	0,45	95,09	-0,20
100 000	103,91	31	104,35	0,43	103,65	-0,25
120 000	114,78	18	115,10	0,28	114,39	-0,34
140 000	127,11	11	127,38	0,21	126,76	-0,27
160 000	140,50	7	140,71	0,15	140,17	-0,23
180 000	154,62	4	154,76	0,09	154,30	-0,21

(d) $m = 500$; $\tau = 5$ ans

V	Q par EDP (a)	Prime de conversion en %	Q par Pricing (b)	$\frac{b-a}{a}$ en %	Q par Pricing avec pseudo volatilité (c)	$\frac{c-a}{a}$ en %
40 000	60,48	520	59,12	-2,25	61,45	1,61
60 000	72,95	210	72,65	-0,41	73,80	1,16
80 000	82,21	111	82,64	0,53	82,81	0,74
100 000	91,06	67	91,81	0,82	91,38	0,35
120 000	100,20	43	101,08	0,88	100,33	0,13
140 000	109,92	29	110,78	0,78	109,86	-0,05
160 000	120,38	21	120,92	0,45	119,96	-0,34
180 000	130,92	14	131,44	0,40	130,51	-0,31
200 000	141,86	10	142,33	0,33	141,47	-0,28

Pour (a), (b), (c), (d) : $N = 1\,000$; $r = 10\,\%$; $\sigma_V = 30\,\%$; $\omega = 1$; $K = 100$; valeur du coupon = 5 ;
valeur du dividende = 3 % de S en t_0 ; 1ère tombée de dividendes et de coupons dans un an.

$(Q-\omega S)/\omega S$, exprimée en pourcentage. Pour des données réelles, celle-ci est le plus souvent inférieure à 200 %.

Le coupon représente 5 % de la valeur nominale du titre, tandis que le dividende est supposé constant et égal à 3 % de la valeur présente de l'action.

Deux niveaux de dilution sont retenus : $m\omega/(N+m\omega)=16{,}6$ % **(tableau 2.a,b,c)** et 33,33 % **(tableau 2.d)**.

La durée de vie des obligations est de 5 ans **(tableau 2.a,b,d)** ou de 3 ans **(tableau 2.c)**. Le **tableau 2.b** présente les résultats obtenus avec une CALL option.

Il ressort de l'ensemble de ces résultats que les valeurs données par PRICING sont très voisines de celles fournies par la résolution de l'EDP, l'écart ne dépassant jamais 1 % pour des valeurs courantes de la prime de conversion.

En l'absence d'une CALL option, PRICING ne surévalue que très légèrement l'obligation, l'écart étant naturellement d'autant plus élevé que la durée de vie du titre est importante. En présence d'une CALL option, l'écart est soit positif soit négatif, mais en général de valeur plus faible.

L'introduction de la pseudo-volatilité de V dans PRICING réduit le plus souvent la valeur de l'obligation convertible, sauf pour les valeurs les plus basses de la firme. La réduction de la valeur de la convertible induite par l'utilisation d'une volatilité légèrement réduite est cependant peu importante et ne dépasse pas 1 %. Il est à noter que la correction apportée par l'usage de la pseudo-volatilité est parfois excessive et peut conduire à des résultats qui ne sont pas systématiquement plus proches de ceux obtenus par la résolution de l'EDP. C'est pourquoi, dans les tests sur données réelles présentés dans la section suivante, il s'est finalement avéré préférable d'introduire dans PRICING la volatilité réelle plutôt que la pseudo -volatilité.

III. LE TEST DU MODELE

1. Les données

Le modèle est testé à l'aide d'un échantillon de 10 obligations convertibles dont la liste figure sur le **tableau n° 3** ci-dessous. Ces titres sont évalués quotidiennement par le modèle durant les deux années 1992 et 1993.

Les cours journaliers des actions et des obligations convertibles proviennent de la base de données DATASTREAM. Les séries de cours des actions sont automatiquement ajustées pour prendre en compte les opérations intervenues sur le capital des sociétés au cours de la période considérée. La base de conversion utilisée est celle en vigueur au 31.12.1993.

La volatilité des firmes de l'échantillon est mesurée, sur une période glissante, par l'écart type de la série des rendements continus quotidiens des firmes. Chaque série est composée des rendements successifs établis à partir des 252 cotations qui précèdent la date d'évaluation par le modèle(7).

Toutes les caractéristiques des titres sont décrites dans les brochures d'émission publiées au BALO(8). Les "Décisions et Avis de la Société des Bourses Françaises" communiquent au jour le jour les évolutions éventuelles du capital des sociétés émettrices, les conversions et les exercices de bons, permettant la mise à jour du nombre de titres à prendre en compte dans le modèle.

---

(7) La volatilité exprimée en base annuelle est donnée par

$$\sigma = 100 \times \sqrt{252} \times \sqrt{\frac{1}{251}\sum_{k=1}^{252}(r_k - m_r)^2}$$

où $r_1, r_2, \ldots, r_{252}$ sont les 252 rendements quotidiens de la firme correspondant à une année de cotation ; m_r désignant la moyenne empirique de ces rendements, avec à la date t : $r_t = \text{Ln}\left(\frac{NS_t + mQ_t}{NS_{t-1} + mQ_{t-1}}\right)$.

(8) Bulletin des Annonces Légales Obligatoires.

Tableau n° 3

Dénomination des obligations convertibles	Caractéristiques statistiques des erreurs(*)				Facteur de dilution au 31.12.1993	Base de conversion au 31.12.1993	Durée de vie résiduelle au 31.12.1993 en années	Call option	Put option
	Moyenne	Ecart type	Skewness	Kurtosis					
Alcatel-Alsthom 6,5 % 1990	2,227 %	0,02195	-0,78399	2,84271	5,42 %	1	6	OUI	NON
Cap Gemini Sogeti 5,5 % 1990	4,67 %	0,02224	0,71413	2,70459	7,39 %	1,33	6	OUI	OUI
CERUS 4 % 1987	8,072 %	0,0255	0,24601	3,76658	1,24 %	3,26	1	NON	NON
CGIP 6,25 % 1988	6,902 %	0,01873	-0,40718	2,60913	3,89 %	1	3	OUI	NON
Danone (ex-BSN) 6,6 % 1990	3,923 %	0,01721	-0,53465	2,37834	5,63 %	1,1	6	OUI	NON
Docks de France 7,5 % 1990	8,957 %	0,01969	-0,74771	4,40323	11,49 %	10	1 à 4	NON	NON
Nord-Est 6,25 % 1987	6,728 %	0,0297	-0,10055	1,86847	8,51 %	1	1 à 3	NON	NON
Rexel (ex-CDME) 6,25 ù 1989	8,745 %	0,03758	-0,36792	2,87632	5,48 %	5	1 à 3	NON	NON
Schneider (ex-SPEP) 6,75 % 1990	11,563 %	0,0259	-0,59127	4,13526	1,70 %	1,44	2 à 5	OUI	NON
Sligos 6,5 % 1989	8,739 %	0,02684	-0,4929	3,84272	7,35 %	2	1 à 3	OUI	NON

(*) L'erreur est calculée en pourcentage de la valeur théorique.

La prévision du montant des dividendes susceptibles d'être détachés pendant la durée de vie des obligations est établie à partir des dividendes nets versés en 1992, 1993 et 1994. Les versements ultérieurs sont définis à l'aide du dividende 1994 auquel un taux de croissance annuel de 10 % est appliqué.

La structure des taux utilisée pour définir les taux à court terme successifs est celle des OAT démembrées - ou strip OAT - fournie par DATASTREAM. Il s'agit donc d'une courbe des taux des "zéro coupons" ou courbe des taux au comptant (ou spot) à partir de laquelle on détermine la série des taux à terme (ou forward) annuels successifs. Les taux à court terme futurs sont assimilés à ces taux à terme. Les taux sont réactualisés tous les mois. La moitié des titres de l'échantillon sont amortissables in fine, les autres étant remboursables selon un tableau d'amortissement établi sur la base de plusieurs tranches sensiblement égales. Dans ce dernier cas, on admet, en première approximation, que l'évaluation d'une obligation se ramène à celle d'un titre amortissable in fine. Il convient alors d'effectuer autant d'évaluations qu'il y a d'échéances possibles. Connaissant les probabilités de tirage au sort annuel, on déduit de ces multiples évaluations, une estimation moyenne de la valeur de l'obligation.

Enfin, le contrat d'émission de la plupart des obligations convertibles de l'échantillon prévoit le remboursement anticipé éventuel des titres encore en circulation, au gré de l'émetteur, par exercice d'une CALL option (cf. **tableau n° 3**). En revanche, le remboursement anticipé éventuel, au gré des souscripteurs, est rarement prévu : dans l'échantillon, seule l'émission CAP-GEMINI-SOGETI est assortie d'une PUT option.

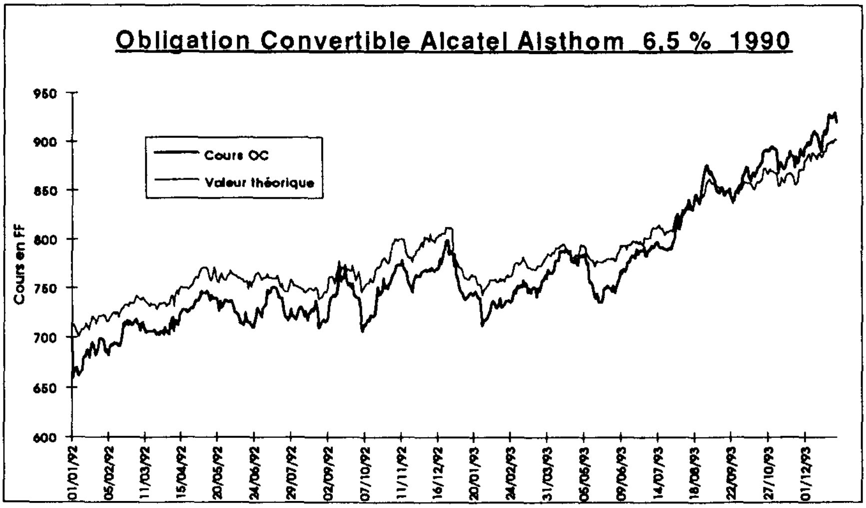
2. Les résultats

Les résultats obtenus sont d'abord présentés sous forme de graphiques (**figure 1**) mettant en parallèle le cours observé sur le marché (trait fort) et la valeur théorique résultant de l'application du modèle (trait fin). Les caractéristiques statistiques des écarts séparant les deux valeurs sont par ailleurs présentées dans le **tableau n° 3**.

D'emblée il ressort que le modèle surévalue les convertibles de l'échantillon, l'écart moyen avec les prix réels variant de 2,2 % (Alcatel-Alsthom) à 11,5 % (Schneider). En revanche, les graphiques fournis par le modèle épousent, de manière satisfaisante, les fluctuations du marché. Le modèle semble donc traduire, avec une bonne sensibilité, les variations des paramètres explicatifs de la valeur d'une obligation convertible.

Il convient, en particulier, de souligner l'aptitude du modèle à traduire en terme de valeur la présence dans le contrat d'émission d'une CALL ou d'une PUT option. Les **figures n° 2** et **n° 3** permettent d'apprécier l'incidence de ces clauses de remboursement anticipé sur la valeur d'une convertible. La **figure n° 2**, établie pour l'obligation CGIP 6,25 % 1988 - en prenant en compte, puis en négligeant, la CALL option - révèle tout d'abord la perte de valeur du titre occasionnée par l'existence d'une telle clause, la réduction de la valeur de l'obligation considérée dépassant parfois 5 %. La **figure n° 3**, établie, selon le même principe, pour l'obligation CAP-GEMINI-SOGETI 5,5 % 1990, révèle quant à elle, le complément de valeur induit par la présence d'une PUT option, celui-ci pouvant représenter plus de 13 % de la valeur de l'obligation. Il semble donc essentiel de ne pas négliger l'existence de ces clauses dans le processus d'évaluation des obligations convertibles.

Bien que la surévaluation des obligations par le modèle soit sensiblement moindre que celle constatée par d'autres études, avec un modèle différent, il convient cependant de s'interroger sur les causes possibles de cette surévaluation.


Obligation Convertible Alcatel Alsthom 6,5 % 1990
Cours OC
Valeur théorique
Cours en FF
950
900
850
800
750
700
650
600
01/01/92
05/02/92
11/03/92
15/04/92
20/05/92
24/06/92
29/07/92
02/09/92
07/10/92
11/11/92
16/12/92
20/01/93
24/02/93
31/03/93
05/05/93
09/06/93
14/07/93
18/08/93
22/09/93
27/10/93
01/12/93

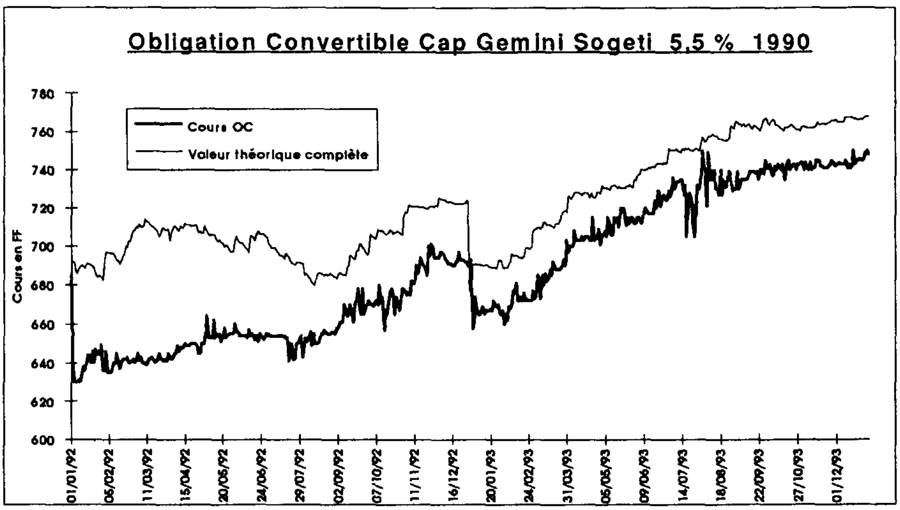
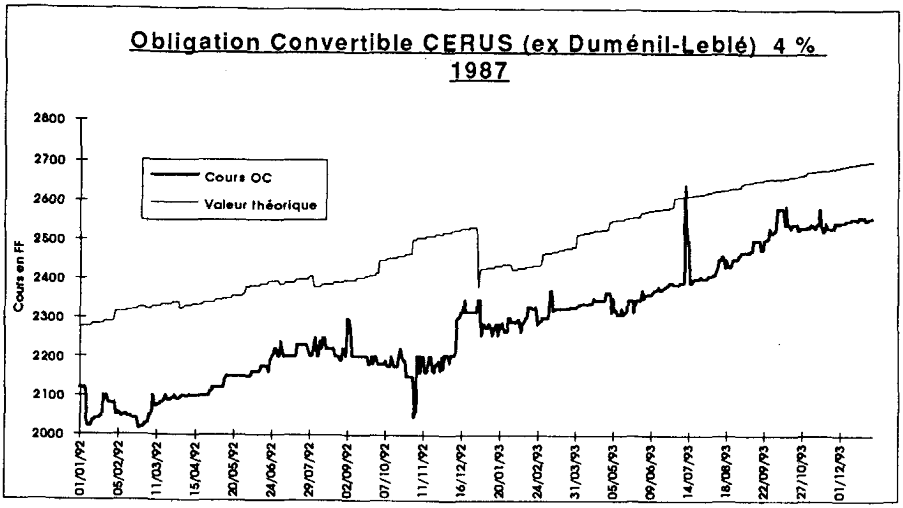

Obligation Convertible Cap Gemini Sogeti 5,5 % 1990
Cours OC
Valeur théorique complète
Cours en FF
780
760
740
720
700
680
660
640
620
600
01/01/92
05/02/92
11/03/92
15/04/92
20/05/92
24/06/92
29/07/92
02/09/92
07/10/92
11/11/92
16/12/92
20/01/93
24/02/93
31/03/93
05/05/93
09/06/93
14/07/93
18/08/93
22/09/93
27/10/93
01/12/93

Figure n° 1



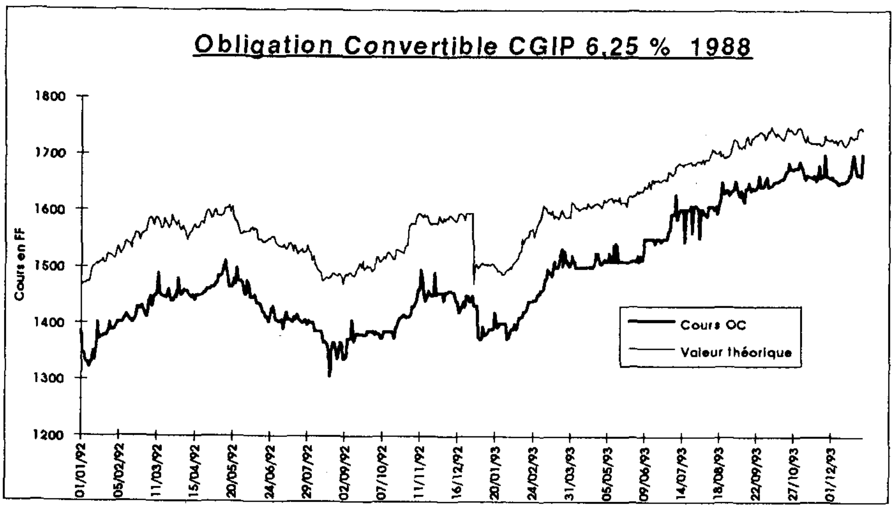
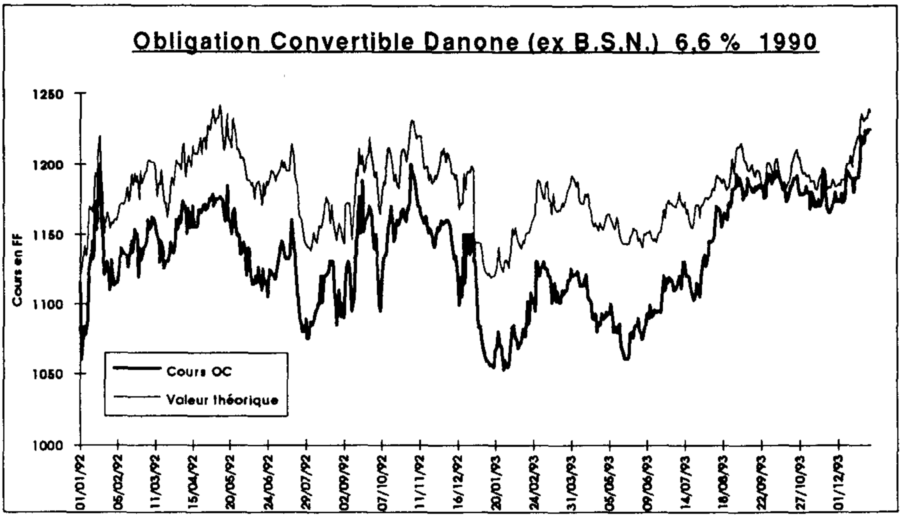


Figure n°1 (suite)



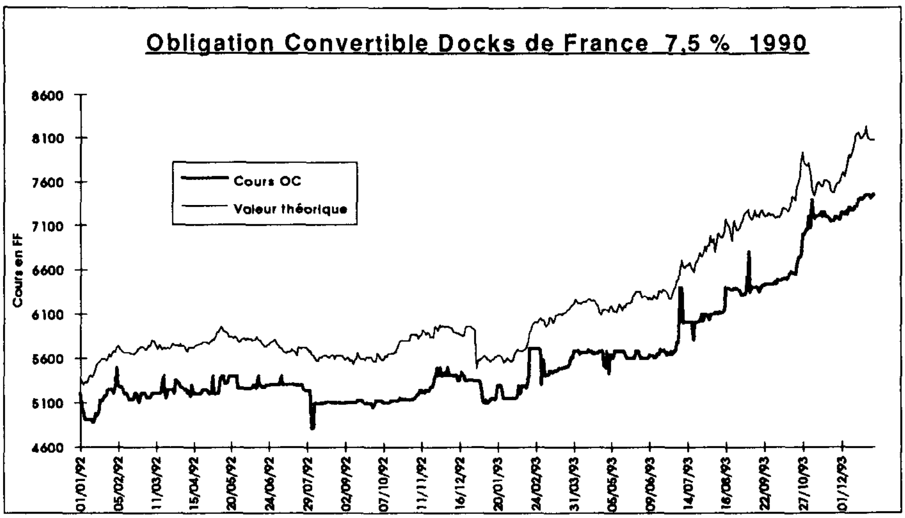
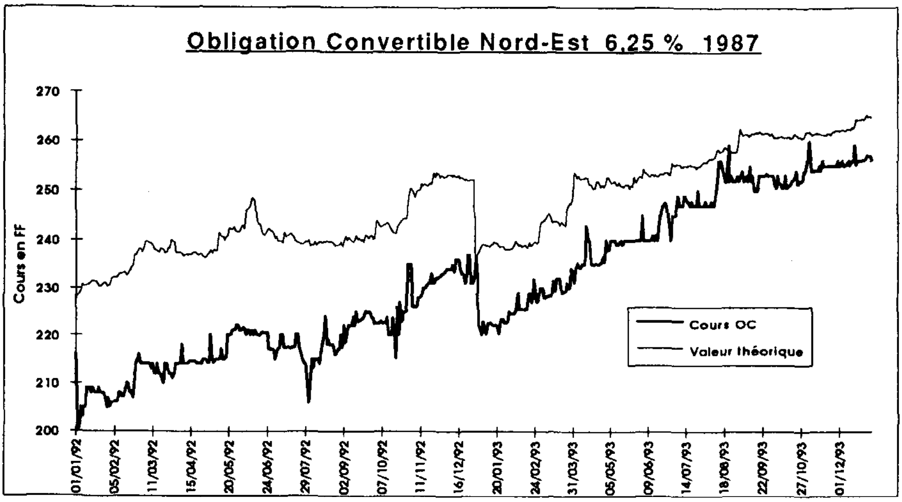


Figure n°1 (suite)



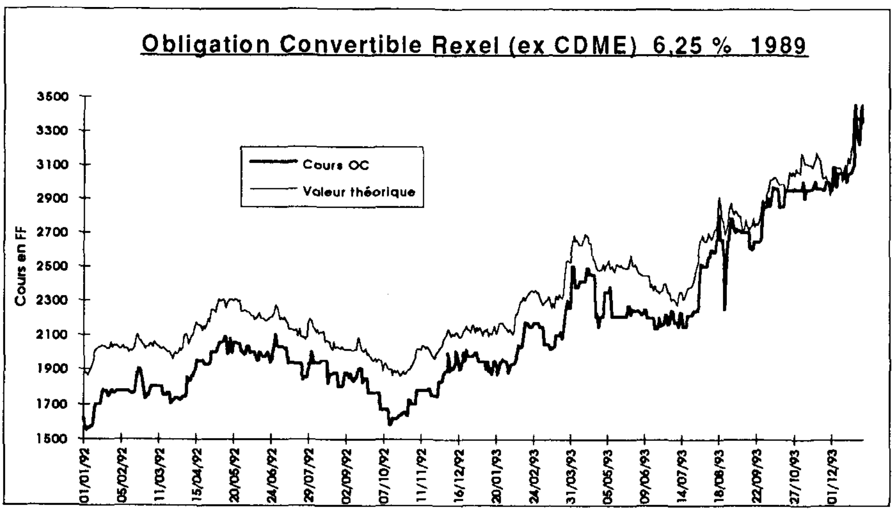
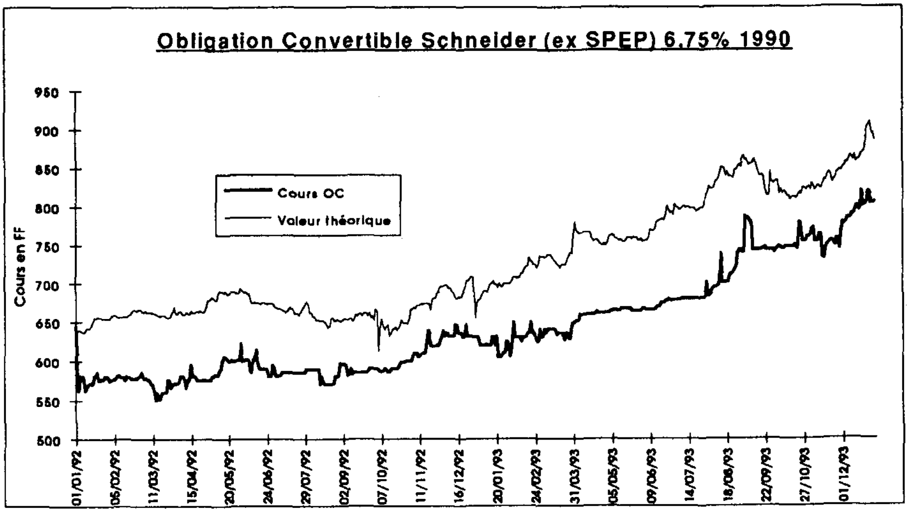


Figure n°1 (suite)



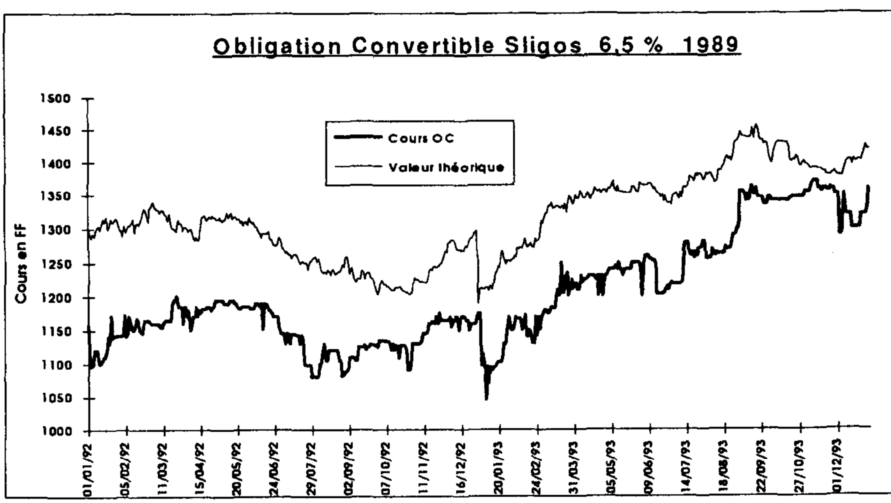


Figure n°1 (suite et fin)

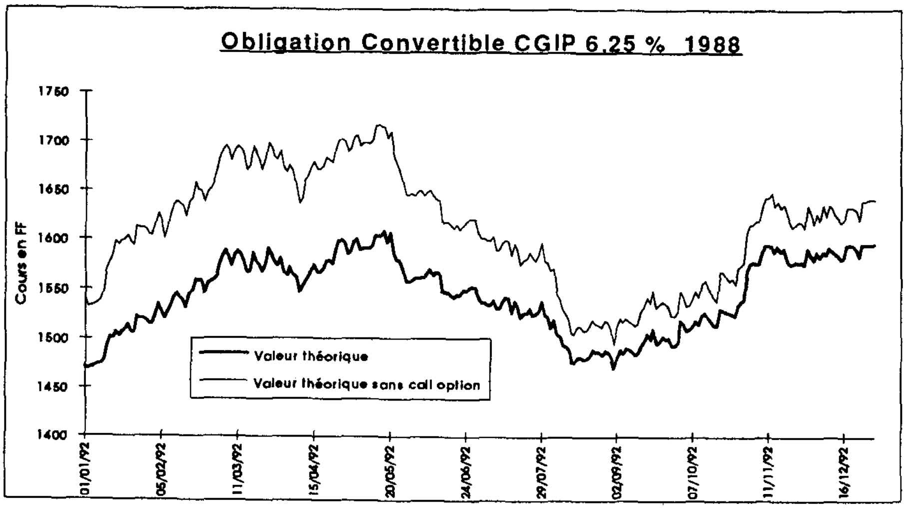


Figure n°2

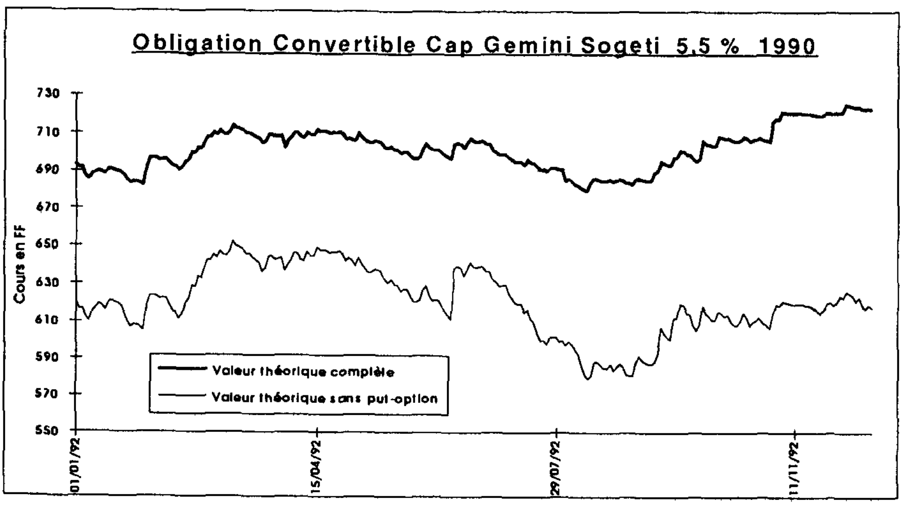


Figure n°3

Faut-il seulement incriminer le marché et se contenter d'affirmer qu'il ne paie pas suffisamment cher la volatilité du sous-jacent ? Il est encore prématuré de se satisfaire de cette unique explication d'autant que la représentation de la firme dans le modèle est somme toute simpliste comparée à la réalité beaucoup plus complexe qu'il cherche à décrire. Il semble au contraire préférable de se demander si un facteur important du processus d'évaluation n'est pas négligé. A cet égard, un examen plus approfondi des résultats obtenus permet d'ajouter une autre explication.

L'une des obligations de l'échantillon, dont la perspective de conversion est très faible, est pratiquement assimilable à une obligation classique. Il s'agit de l'obligation CERUS 4 % 1987. Cette obligation est remboursable le 1er Janvier 1995 à 2 640 F alors que sa valeur de conversion n'a jamais dépassé 160 F au cours des années 1992 et 1993. La valeur de cette obligation est donc proche de son plancher actuariel ; elle est en outre très peu sensible aux fluctuations de la valeur de l'action. Or, le modèle surestime cette obligation de 8 % environ. Par conséquent, le rendement actuariel de l'obligation en cas de remboursement - sensiblement équivalent ici au rendement actuariel de la valeur nue - est manifestement sous-évalué par le modèle. Même si la défaillance de l'émetteur est bien une perspective prise en compte par le modèle, l'aptitude de ce dernier à traduire précisément,en terme de prime de risque, le risque de défaut de l'émetteur n'est donc pas pleinement vérifiée.

Cette hypothèse est confirmée par le calcul de la valeur nue des obligations à l'aide du modèle. Il ressort en effet que ce dernier surévalue légèrement la valeur nue des obligations. Le taux actuariel de la valeur nue des titres est en effet inférieur au taux actuariel des obligations du secteur privé constaté au cours de la période, l'écart moyen variant de 0,4 à 0,7 % environ.

L'incidence de la surévaluation de la valeur nue sur celle de l'obligation convertible est bien sûr d'autant plus faible que la prime de conversion du titre est peu élevée et que la probabilité de sa conversion est grande.

L'intérêt de la protection contre une baisse de l'action, offerte par l'obligation convertible, devient alors négligeable. Le graphique relatif à l'obligation ALCATEL ALSTHOM 6,5 % 1990 révèle, par exemple, que l'écart entre le cours du titre et sa valeur donnée par le modèle diminue de 1992 à 1993 alors que la valeur de l'action a augmenté de plus de 50 % et que sa prime de conversion ne s'élève plus, fin 1993, qu'à 6 % environ.

Même si la surévaluation de la valeur nue des obligations convertibles constitue un facteur explicatif de la surévaluation des titres par le modèle, il est clair cependant que ce phénomène ne justifie qu'une petite partie de l'écart constaté avec les prix de marché.

IV. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Au total, cette étude, dont l'objet consistait à tester une méthode d'évaluation des obligations convertibles intégrant le phénomène de dilution, a révélé que les estimations fournies par le modèle dépassaient en moyenne de 7 % les prix de marché.

Cette étude confirme donc les conclusions des études précédentes selon lesquelles le marché sous-estime sensiblement la valeur des obligations convertibles.

Toutefois, l'aptitude du modèle à sous-estimer, en terme de prime de risque, le risque de défaillance de l'émetteur a également pu être mis en évidence. C'est sans doute en cherchant à remédier à ce principal défaut du modèle que l'on devrait accroître son efficacité. A cette fin, au moins deux améliorations semblent envisageables.

Il conviendrait tout d'abord de mieux prendre en compte le risque de défaillance dû à l'endettement de l'émetteur. Le modèle présenté ici n'inclut en effet qu'une seule forme de dette, celle résultant de l'émission de convertibles. Toutes les autres dettes, qui contribuent pourtant au risque de défaillance de l'émetteur, sont négligées. On pourrait donc introduire dans le modèle un troisième mode de financement censé résumer à lui seul toutes les autres formes de dettes présentes dans le bilan d'une firme. Ce financement, que l'on pourrait qualifier «d'implicite», devrait permettre de caler la valeur nue des obligations convertibles sur le niveau compatible avec les normes du marché.

La seconde amélioration envisageable pourrait consister à introduire des coûts de faillite dans le modèle. L'existence de ces coûts contribue en effet à majorer la prime de risque incluse dans le rendement à l'échéance des obligations émises par les entreprises. Leur prise en compte dans le modèle devrait donc réduire la valeur nue des obligations et rapprocher des prix de marché l'estimation globale des convertibles.

Annexe

Résolution par la méthode des différences finies de l'équation aux dérivées partielles régissant la valeur d'une obligation convertible

La valeur d'une obligation convertible vérifie l'EDP classique de BLACK et SCHOLES telle que :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 Q_{VV} + rVQ_V - rQ - Q_\tau = 0$$

et les conditions limites suivantes

$$Q(0,\tau) = 0$$

$$Q(V,0) = \begin{cases} \dfrac{V}{m} & \text{si } V < mK \\ K & \text{si } mK < V < K\dfrac{N+m\omega}{\omega} \\ \dfrac{\omega}{N+m\omega}V & \text{si } K\dfrac{N+m\omega}{\omega} < V \end{cases}$$

$$Q_V = \frac{\omega}{N+m\omega} \quad \text{quand } V \to \infty$$

En outre, lors d'une tombée de coupons et de dividendes (on suppose ici que les coupons et les dividendes sont versés simultanément le 1er Janvier), C désignant le coupon et d le dividende

$$mQ(V,\tau^+) = \begin{cases} V & \text{si } V < mC \\ mC & \text{si } mC < V < mC + Nd \\ mC + mQ\left[V - (mC + Nd), \tau^-\right] & \text{si } mC + Nd < V \end{cases}$$

Enfin, en présence d'une CALL option exerçable lorsque le cours de l'action dépasse un seuil X

$$Q = \frac{\omega}{N + m\omega} V \quad \text{lorsque} \quad X \leq \frac{V}{N + m\omega} .$$

On utilise le schéma implicite pur décrit par SCHWARTZ (1977) pour approximer les dérivées partielles de l'EDP.

En adoptant les notations classiques suivantes :

$$Q(V,\tau) = Q\left(V_i, \tau_j\right) = Q(ih, jk) = Qi, j$$

où h et k désignent le pas de discrétisation de V et de τ respectivement et où i=0,1,...,n et j=0,1,2,...,s .

Les dérivées partielles s'écrivent :

$$Q_V = \frac{Q_{i+1,j} - Q_{i-1,j}}{2h} \; ; \; Q_{VV} = \frac{Q_{i+1,j} - 2Q_{i,j} + Q_{i-1,j}}{h^2} \; ; \; Q_\tau = \frac{Q_{i,j} - Q_{i,j-1}}{k}$$

Après simplification, l'EDP prend la forme de l'équation aux différences finies suivante :

$$a_i Q_{i-1,j} + b_i Q_{i,j} + c_i Q_{i+1,j} = Q_{i,j-1} \quad \text{avec i=1,2,...,n-1 ; j=1,2,...,s}$$

et où $a_i = \frac{1}{2} rki - \frac{1}{2} \sigma^2 ki^2$; $b_i = (1 + rk) + \sigma^2 ki^2$; $c_i = -\frac{1}{2} rki - \frac{1}{2} \sigma^2 ki^2$;

les conditions aux bornes s'écrivent de même :

$$Q_{0,j} = 0 \quad \text{pour tout j}$$

$$Q_{i,0} = \begin{cases} \dfrac{ih}{m} & \text{si } ih < mK \\ K & \text{si } mK < ih < K\dfrac{N + m\omega}{\omega} \\ \dfrac{\omega ih}{N + m\omega} & \text{si } K\dfrac{N + m\omega}{\omega} < ih \end{cases}$$

$$Q_{n,j} - Q_{n-1,j} = \frac{\omega h}{N + m\omega}$$

L'ensemble des valeurs de l'obligation convertible pour une durée de vie j est déterminé à partir de l'ensemble des valeurs de l'obligation pour une durée j-1 par la résolution d'un système linéaire, les valeurs en j=0 et pour i=0 étant connues.

Lors d'une distribution, les valeurs suivantes se substituent aux solutions du système linéaire :

$$mQ_{i,j^*} = \begin{cases} ih & \text{si } ih < mC \\ mC & \text{si } mC < ih < mC + Nd \\ mC + mQ_{i-\frac{mC+Nd}{h},j} & \text{si } mC + Nd < ih \end{cases}$$

Lorsque (mC+Nd) n'est pas divisible par h, une procédure d'approximation linéaire est nécessaire pour le calcul de $Q_{i-\frac{mC+Nd}{h},j}$.

Enfin en présence d'une CALL option la résolution du système linéaire doit tenir compte de l'égalité suivante :

$$Q_{i,j} = \frac{\omega ih}{N + m\omega} \text{ lorsque } X \leq \frac{ih}{N + m\omega}\ .$$

Bibliographie

AUGROS J.C., "*Finance : options et obligations convertibles*". 2ème édition. Economica, 1987.

AUGROS J.C., "Evaluation des obligations convertibles en actions assorties ou non de bons de souscription d'actions ordinaires ou remboursables". *Journées Internationales de l'AFFI*, Université Catholique de Louvain, Louvain la Neuve, 1er Juillet 1991.

BOULIER J.F. et JAMET F., "Un regard neuf sur la valorisation des obligations convertibles françaises : sont-elles à leur prix ?". *Quants n° 1*, Mars 1991.

BOULIER J.F. et CARRE J., "Les obligations convertibles et leur évaluation : taux de rentabilité et prix". *Crédit Commercial de France*, Paris, Septembre 1989.

BLACK F. et SCHOLES M., " The pricing of options and corporate liabilities". *Journal of Political Economy*, Mai/Juin 1973, p. 637-654.

BRENNAN M.J. et SCHWARTZ E.S., "Convertible bonds : valuation and optimal strategies for call and conversion". *Journal of Finance*, 32, Décembre 1977, p. 1699-1716.

CONSTANTINIDES G. et ROSENTHAL R., "Strategic analysis of the competitive exercice of certain financial options". *Journal of Economic Theory*, 32, Février 1984, p. 128-138.

COX J.C., ROSS S.A. et RUBINSTEIN M., "Option pricing : a simplified approach". *Journal of Financial Economics*, 7, Septembre 1979, p. 229-263.

COX J.C. et RUBINSTEIN M., "*Options markets*". Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.

GIBSON R., "*Obligations et clauses optionnelles*". Presses Universitaires de France, 1990.

EMANUEL D.C., "Warrant, valuation and exercice strategy". *Journal of Financial Economics*, 12, 1983, p. 211-235.

INGERSOLL E., "A contingent claims valuation of convertible securities". *Journal of Financial Economics*, 4, 1977.

MODIGLIANI F. et MILLER M., "The cost of capital, corporation finance and the theory of investment". *American Economic Review*, Juin 1958.

SCHWARTZ E.S., "The valuation of warrants : implementing a new approach". *Journal of Financial Economics*, 4, 1977.

SPATT C. et STERBENZ F.P., "Warrant exercice, dividends and reinvestment policy". *Journal of Finance*, Juin 1988, p. 493-506.